CONCURSUL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/REZERVATE ÎN UNITĂȚILE DE ÎNVĂȚĂMÂNT PREUNIVERSITAR
20 IULIE 2016- rezolvata detaliata

Subiectul I (30 puncte)

1. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuaţiei x^2 - 2(m +1) x + m +1= 0 , unde m este număr real.

a) Pentru $m = 0$, rezolvați ecuația.

b) Determinaţi numerele reale m pentru care o soluție a ecuației este dublul celeilalte soluții.

c) Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care

$$x_1^2+x_2^2 - x_1\, x_2(x_1 + x_2) > 0$$

1. **a.** Pentru $m=0$ ecuația devine $x^2-2x+1=0$, adică $(x-1)^2=0$. Soluția ecuației este $x_1=x_2=0$.

   b. Pentru ecuația dată scriem relațiile lui Viéte și obținem $x_1+x_2=2(m+1)$ și $x_1x_2=m+1$, adică $x_1+x_2=2x_1x_2$.Cum $x_1=2x_2$, ecuația anterioară devine $2x_2=4{x_2}^2$

   Rezolvând această ecuație de gradul al II-lea obținem $x_2=0$ sau $x_2=\frac{3}{4}$, ceea ce implică $m=-1$ sau $m=\frac{1}{8}$.

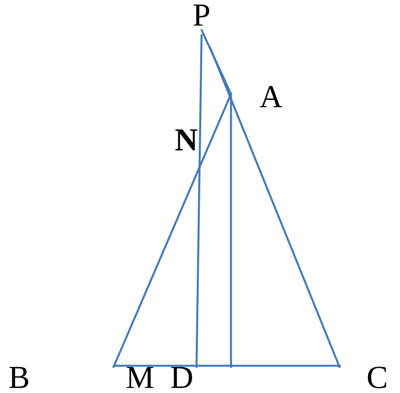
   c. Folosind relațiile lui Viéte și faptul că ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, inecuația din enunț devine $4(m+1)^2-2(m+1)-2(m+1)^2>0$, adică $2m(m+1)>0$. Rezolvând ecuația rezultată obținem soluția $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

2. Se consideră un triunghi ABC cu $AB = AC$ şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Prin punctul $M \in (BD)$ se construiește paralela la AD , care intersectează dreptele AB și AC în punctele N , respectiv P .

a) Arătați că punctul C este simetricul punctului B față de punctul D.

b) Demonstrați că triunghiul ANP este isoscel.

c) Demonstrați că $NM + PM = 2AD$.



2.a. Cum AD este înălțimea corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel ABC rezultă că AD este mediană, deci punctul D este mijlocul segmentului BC. Astfel, punctul C este simetricul lui B față de punctul D.

b. Pentru dreptele paralele AD și PM considerăm secanta AN rezultând astfel unghiurile corespondente $A\hat{N}P \equiv B\hat{A}D$. Pentru aceleși drepte paralele considerăm secanta CP rezultând astfel unghiurile alterne interne $A\hat{P}N \equiv C\hat{A}D$. Cum AD este înălțimea corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel ABC rezultă că AD este bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$, deci $B\hat{A}D \equiv C\hat{A}D$. Din tranzitivitatea celor trei relații de congruență rezultă $A\hat{P}N \equiv A\hat{N}P$, deci triunghiul ANP este isoscel.

c. În triunghiul BMN avem $MN \| AD$ și, conform Teoremei Fundamentale a Asemănării, obținem $\Delta BMN \sim \Delta BDA$, de unde rezultă că $\frac{NM}{AD} = \frac{NB}{AB}$. Analog, din $AD \| PM$ rezultă că $\Delta CPM \sim \Delta CAD$, de unde rezultă că $\frac{PM}{AD} = \frac{PC}{AC}$. Cum $AB = AC$ și $AN = AP$, obținem $\frac{NM + PM}{AD} = \frac{NB}{AB} + \frac{PC}{AC} = \frac{AB - AN}{AB} + \frac{AC + AP}{AC} = 2$, deci $NM + PM = 2AD$.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se considera matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}$

   unde x este numar real.

   a) Arătați că $\det(A(0)+A(1)+I_3)=3$
   b) Demonstrati ca $A(x)A(y)=A(x+y-2xy)$, pentru orice numere reale x si y.
   c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A^2(x)-(1-x)A(x)+I_3)=0$

a. Cum $A(0)+A(1)+I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, atunci

$\det(A(0)+A(1)+I_3)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=4-1=3$.

b. Efectuând produsul obținem $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-y & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\\ y & 0 & 1-y\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)+xy & 0 & (1-x)y+x(1-y)\\ 0 & 0 & 0\\ x(1-y)+(1-x)y & 0 & xy+(1-x)(1-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy\\ 0 & 0 & 0\\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy)\end{pmatrix}=$

$=A(x+y-2xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c. Conform punctului b. avem $A^2(x)=A(2x-2x^2)=\begin{pmatrix}1-2x+2x^2 & 0 & 2x-2x^2\\ 0 & 0 & 0\\ 2x-2x^2 & 0 & 1-2x+2x^2\end{pmatrix}$.

Cum $(1-x)A(x)=\begin{pmatrix}1-2x+x^2 & 0 & x-x^2\\ 0 & 0 & 0\\ x-x^2 & 0 & 1-2x+x^2\end{pmatrix}$, ecuația din enunț devine

$\begin{vmatrix}x^2+1 & 0 & x-x^2\\ 0 & 1 & 0\\ x-x^2 & 0 & x^2+1\end{vmatrix}=0$, adică $(1+x)(2x^2-x+1)=0$, de unde obținem soluția $x=-1$.

2. Se consideră funcția $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

a) Aratati ca $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$. x ∈R

b) Demonstrati ca $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria mai mare sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$

a. Aplicând formula de derivare a compunerii funcțiilor obținem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \cdot (x^2-x+1)' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}},\quad x \in \mathbf{R}$.

b. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-x+1}}\right)^{\frac{-x^2+x}{2x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

c. $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, de unde rezultă că $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

În aceste condiții $\Gamma_f = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \sqrt{x^2-x+1}dx \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}x\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

Următoarea secvenţă face parte din programa şcolară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competenţe specifice	**Conţinuturi**
1. Recunoaşterea şi **descrierea** unor proprietăţi ale triunghiurilor în configuraţii geometrice date **2. Calcularea** unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri utilizând metode adecvate **3. Utilizarea** unor concepte matematice în triunghiul isoscel, în triunghiul echilateral sau în triunghiul dreptunghic **4. Exprimarea** caracteristicilor matematice ale triunghiurilor şi ale liniilor importante în triunghi prin definiţii, notaţii şi desen **5. Deducerea** unor proprietăţi ale triunghiurilor folosind noţiunile studiate **6. Interpretarea** informaţiilor conţinute în probleme legate de proprietăţi ale triunghiurilor	**Proprietăţi ale triunghiurilor** · Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior · Mediana în triunghi; concurenţa medianelor unui triunghi (fără demonstraţie) · Proprietăţi ale triunghiului isoscel (unghiuri, linii importante, simetrie) · Proprietăţi ale triunghiului echilateral (unghiuri, linii importante, simetrie) · Proprietăţi ale triunghiului dreptunghic (cateta opusă unghiului de 30°, mediana corespunzătoare ipotenuzei

(Programa şcolară de matematică, OMECI nr. 5097/09.09.2009)

Pentru evaluarea, la finalul unității de învățare **Proprietăţi ale triunghiurilor** (clasa a VI-a), a două dintre competenţele specifice precizate în secvenţa de mai sus, elaboraţi doi itemi: un item de tip alegere multiplă şi un item de tip rezolvare de probleme.
În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:
- formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenţei specifice alese;
- răspunsul aşteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaboraţi;
- corectitudinea științifică a informaţiei de specialitate.

Test de evaluare

Competente specifice

1.Calcularea unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri utilizând metode adecvate

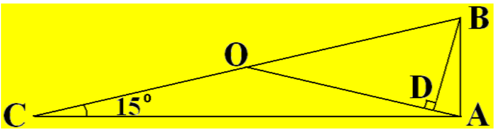
2 . Utilizarea unor concepte matematice în triunghiul isoscel, în triunghiul echilateral sau în triunghiul dreptunghic.

Itemii propusi sunt parte componenta a unui test integral de evaluare la finalul unitatii de invatare **Proprietăţi ale triunghiurilor.**

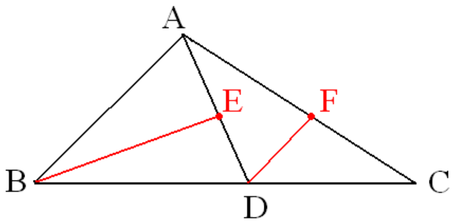
10p **1.** În figura de mai jos aveţi ΔABC dreptunghic în A, O este mijlocul lui [BC],

$BD \perp AO$, $D \in (AO)$, m(∢BCA) = 15°, BD = 6 cm. Lungimea lui [BC] este egală cu:

A.27 cm B.30 cm C.18 cm D.24 cm



15p **2.** Fie ΔABC, $D \in (BC)$ astfel încât AB = BD şi AD = DC.



5p **a)** Exprimaţi măsura ∢BCA în funcţie de măsura ∢ABC.

5p **b)** Dacă [BE este bisectoarea ∢ABD, $E \in (AD)$, [DF este bisectoarea ∢ADC, $F \in (AC)$, demonstraţi că dreptele EF şi BC sunt paralele.

5p **c)** Stabiliţi natura ΔABC dacă FD||AB.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin impărțirea punctajului obținut la 10.

1. $\left.\begin{array}{l} \Delta ABC\ \Delta dreptunghic \\ AO\ mediana \end{array}\right\} \Rightarrow AO = \dfrac{BC}{2}$

$[AO] \equiv [CO] \Rightarrow \Delta AOC = \Delta isoscel \Rightarrow$ m(∢OCA) = m(∢OAC) = 15°$\Rightarrow$m(∢AOC)=150°

$\Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 30^0 \overset{T\angle 30^0}{\Longrightarrow} BD = \dfrac{BO}{2}$

$6=\frac{BO}{2}\Rightarrow BO=12cm\Rightarrow$

$BC=2\cdot BO=2\cdot 12$ **10p**

$BC=24cm$

2. a) $[AB]\equiv[BD]\Rightarrow \Delta ABD\ \Delta isoscel \Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=m(\sphericalangle ADB)$

$Daca\ notam\ m(\sphericalangle ABC)=x^0 \Rightarrow m(\sphericalangle ADB)=\frac{180-x^0}{2}=2\ m(\sphericalangle ACB)$ **3p**

$\Rightarrow m(\sphericalangle BCA)=\frac{180-x^0}{4}=\frac{180-m(\sphericalangle ABC)}{4}$ **2p**

b) EF mediana in triunghiul dreptunghic AFD **2p**

$\Rightarrow FE=\frac{AD}{2}$ **1p**

$(\sphericalangle EFD)\equiv(\sphericalangle FDC)$ (alterne interne) $\Rightarrow EF \parallel BC$ **2p**

c) ΔADC isoscel din ipoteza

[$\boldsymbol{DF}$ **bisectoarea** $\sphericalangle ADC \Rightarrow DF\perp AC$ **3p**

Cum $DF \parallel BA \Rightarrow AB\perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic **2p**

Clasa a VI-a

TEST DE EVALUARE

PROPRIETĂŢILE TRIUNGHIURILOR

- **Din oficiu se acordă 10 puncte.**
- **Timpul de lucru este de 50 minute.**

Subiectul I. Pe foaia de test scrieţi litera corespunzătoare rezultatului corect (60 puncte)

10p **1**. Triunghiul ABC este isoscel, AB = AC; AD⊥BC, D∈(BC). Perimetrul ΔABD este egal cu 12 cm, AD = 4 cm. Perimetrul ΔABC este egal cu:

A.14 cm B.16 cm C.18 cm D.20 cm

10p **2**. Triunghiul ABC este isoscel, AB = AC; [BD este bisectoarea ∢ABC; dacă m(BDA) = 75°, atunci m(∢BAC) este egală cu:

A.70° B.80° C.90° D.100°

10p **3**. Măsurile a două unghiuri într-un triunghi isoscel sunt invers proporţionale cu numerele 5 şi 2. Măsurile unghiurilor sunt egale cu:

A.(50°;50°;80°) B.(45°;45°;90°) C.(40°;40°;100°) D.(36°;36°;108°)

10p **4**. Perimetrul unui triunghi este egal cu 36. Dacă lungimile laturilor sunt direct proporţionale cu 3 , 4 şi 5, atunci lungimile laturilor sunt:

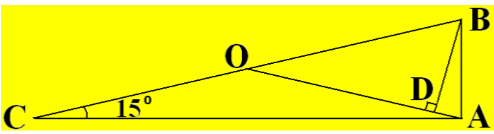
A.(9;12;15) B.(10;12;16) C.(8;9;20) D.(14;14;8)

10p 5. Triunghiul ABC are laturile de lungimi $AB = c \neq 1$, $BC = 1cm$, $AC = b \neq 1cm$. Triunghiul ABC este

A. oarecare B.dreptunghic C. isoscel D.nu se poate preciza

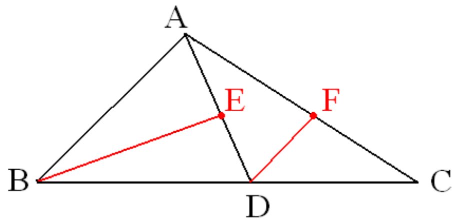
10p **6**. În figura de mai jos aveţi ΔABC dreptunghic în A, O este mijlocul lui [BC], BD⊥AO, D∈(AO), m(∢BCA) = 15°, BD = 6 cm. Lungimea lui [BC] este egală cu:

A.27 cm B.30 cm C.18 cm D.24 cm



Subiectul II. Pe foaia de test scrieţi rezolvările complete (30 puncte)

1. Fie ΔABC, D∈(BC) astfel încât AB = BD şi AD = DC.

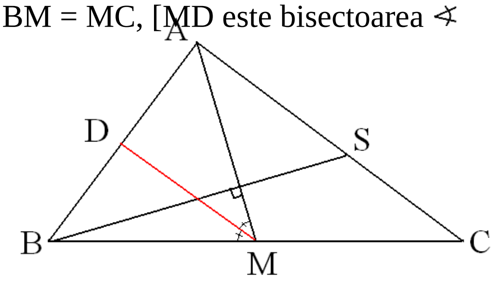


5p **a)** Exprimaţi măsura ∢BCA în funcţie de măsura ∢ABC.

5p **b)** Dacă [BE este bisectoarea ∢ABD, E∈(AD), [DF este bisectoarea ∢ADC, F∈(AC), demonstraţi că dreptele EF şi BC sunt paralele.

5p **c)** Stabiliţi natura ΔABC dacă FD||AB.

2. Fie ΔABC, dreptunghic în A, M∈(BC) astfel încât BM = MC, [MD este bisectoarea ∢AMB, D∈(AB), S∈(AC) astfel încât BS⊥AM.



5p **a)** Demonstraţi că DM||AC.

5p **b)** Aflaţi m(∢ABC) dacă m(∢BSC) = 130°.

5p **c)** {Q} = BS∩MD. Demonstraţi că AQ⊥BC.